第 4 章　微分と積分の関係

（4 章の説明）この章では，微分と積分の関係について見ていきます．$x(t)$（正確には位置の変化）と $v(t)$ の関係から，微分と積分はある意味逆の関係であると考えられます．どういう意味において逆なのか考えていきましょう．

また，この関係を詳しく考察することで積分法の公式が数多く得られます．

微分と積分の関係を詳しく考えるために,「積分関数」と「原始関数」という 2 つの言葉を導入します．

1　積分関数と原始関数

1.1　積分関数

準備：定積分についての補足

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

- 定積分で，和をとる際に動かす変数（積分変数：上の例では x）にはどんな文字を使ってもいい（計算結果に x は出てこない）．ただし，他の文字と被ってはいけない．
- 積分区間（ここでは $[a, b]$）の左端 (a) を積分の下限，右端 (b) を積分の上限という．

積分関数とは，定積分の上限を変数で置き換えることで得られる関数のことです．少し概念的に難しいですが，定義と例をじっくり見て理解していきましょう．

定義 1 (積分関数) 関数 f を，ある数 a から x まで定積分したもの

$$G(x) := \int_a^x f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.2}$$

は x の関数である[1]．

（積分変数として，x の代わりに x' を用いた．積分結果に x' は出てこない！）

このとき G を f の**積分関数**という[2]．

積分の上限を色々動かすと，積分結果も色々動きます．そこで積分の上限を x としたとき，積分結果は x の関数になるわけで，それを積分関数というわけです．

[1]（記号の説明）$A := B$ と書いた場合，これは「新しく導入した記号 A を式 B によって定義する」という意味です．

[2]積分の下限 a は何でもいいです．また $x < a$ の場合は

$$G(x) := -\int_x^a f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.3}$$

にて定義する．

積分関数と定積分　今，我々は積分関数

$$G(x) := \int_a^x f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.4}$$

を知っているとしましょう．このとき，この $G(x)$ を使って定積分

$$\int_b^c f(x)\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

を計算できます．ただし，$a < b < c$ とします．

区間の合併公式（「3.2.2 定積分の基本的な性質」参照）より

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

が成り立ちます．これを積分関数の定義 (1.4) と見比べると，

$$G(c) = G(b) + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

ですから，求めたい定積分 (1.5) が

$$\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = G(c) - G(b) \tag{1.8}$$

として求められます．この式 (1.8) はそのまま公式として使うことができる，重要な式です．直観的には，図 1 を見れば理解できます（「II」と書いてある領域が，左辺の積分を表します）．

ここでの話をまとめると，次のようになります．

[!] 定積分は，積分関数の差で求められる．

言葉・記号についてのコメント　積分関数の定義 (1.2) において，積分の下限 a は何でもよいです．つまり a としてどんな数を用いようとも，その a によって式 (1.2) で定義される $G(x)$ は正しく関数 f の積分関数です．もちろん $a = 1$ のときの G と $a = 2$ のときの G は違う関数ですが，どちらも「f の積分関数」と呼ぶのです．「f の積分関数」は下限 a の数だけ（無数に）存在するわけです．

[> 積分関数は無数にある．

しかし式 (1.8) を見ると，その中に積分の下限 a が全く顔を出していないことに気がつきます．つまり，式 (1.8) は a の値が何であろうと関係なく成り立つ式なのです．

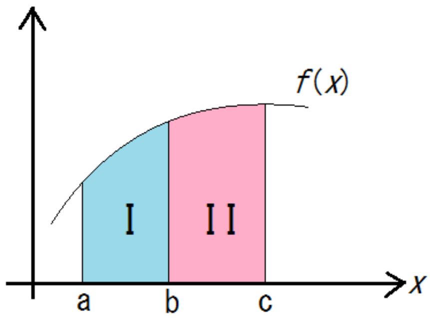

図 1: 式 (1.8) の意味を直観的に理解するための図で,「II」と書いてある領域が左辺の積分を表しています．積分関数 $G(x)$ の定義に戻って考えると，$G(b)$ が「I」と書いてある領域の面積で，$G(c)$ が「I」と「II」の面積の和に対応することが分かります．従って，式 (1.8) 左辺の積分が $G(c) - G(b)$ で求められることは図形的には明らかです．

実はこの例のように，積分関数の定義式における積分の下限というのは，実用上あまり重要にならないことが多いのです．そのような場合には，積分範囲を省略して単に

$$G(x) = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

と書いてしまうことがあります．ここで本来 x は積分の上限に来るべき変数であり，積分変数ではないのでこのような書き方は適切ではないのですが，単に便利なのでよく使われる書き方です．このような書き方を見たら,「これは $f(x)$ の積分関数だ」と頭の中で読み替えてください．

また式 (1.9) のような書き方をした場合，これを**不定積分**と呼びます．定積分がただの数（値が定まっている）であるのに対照させて，こちらは x の関数（値が定まっていない）だから「不定」積分です．

これまで「積分する」という動詞は，定積分を求める際にのみ使ってきました（例：関数 $f(x)$ を a から b まで積分する）．しかし，$f(x)$ の積分関数（不定積分）を求めることもまた「$f(x)$ を**積分する**」と言います．少し混乱しそうですが，前後の文章を読めば文脈でどちらの意味か判断できるはずです．

1.2　積分関数の例

位置の変化は，速度の定積分で表せます：

$$x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} v(t')\mathrm{d}t' \tag{1.10}$$

t の代わりに t' を使いました．

今仮に，時刻 t_i における位置を我々が知っているとして，$x(t_i) = x_0$ とします．すると時刻 t における位置 $x(t)$ は，上の式 (3.20) で $t_f = t$ とおいて，

$$x(t) = \int_{t_i}^{t} v(t')\mathrm{d}t' + x_0 \tag{1.11}$$

と書けますよね．右辺第一項が，関数 $v(t)$ の積分関数です．すなわち，次のことが言えます．

[$\star$] 位置 $x(t)$ は速度 $v(t)$ の積分関数（+ 定数[3]）である．

ところで，$x(t)$ を微分したものが $v(t)$ なのでした．つまり，$v(t)$ の積分関数である $x(t)$ を微分すると，元の $v(t)$ に戻るわけです．ということは，次のような予想が立ちます：

予想：積分関数を微分すると元に戻る？

前節で定義した言葉遣いで言えば，この予想は「$f(x)$ を積分して微分すると元に戻る？」となります．この予想について考えていくために，次回は「原始関数」という概念を導入します．

1.3　原始関数

原始関数の概念は，積分関数と比べると簡単です．$f(x)$ の原始関数とは，微分すると $f(x)$ になるような関数のことです．

定義 2 (原始関数) 関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ であるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．

こうして見ると，原始関数と導関数は，親と子供みたいな関係ですね．
F：お母さん
f：子供

[3]位置を測る際，時刻 t_i における位置を基準にして（つまり $x_0 = 0$ となるように原点を調整して）測れば，この定数はいらなくなります．

みたいに捉えると分かりやすいです．F が f の原始関数（お母さん）であるならば，f は F の導関数（子供）であるわけです．

定義から当たり前ですが，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の原始関数は $f(x)$ です．また，$f(x)$ に定数を足したものも微分すると $f'(x)$ になるので，$f'(x)$ の原始関数です．このように，$f(x)$ の原始関数はたくさんあるのです．

[$>$ 原始関数も無数にある．

例 1 速度 $v(t)$ は位置 $x(t)$ の導関数であるので，$x(t)$ は $v(t)$ の原始関数．

例 *2* x^{n+1} の導関数は $(n+1)x^n$ なので，

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{1.12}$$

は x^n の原始関数．

コメント． 高校数学では，「積分とは原始関数を求めること」だと教えられ，また原始関数そのもののことを「不定積分」と呼んだりします．

このような言い方をするのは，後に *2.1* 節で証明するとおり，原始関数と積分関数は実質的にほぼ同じものであるためです（しかし原始関数の本来の意味に立ち返ると，これは不自然な言葉遣いと言わざるを得ません．）．

さて，原始関数という言葉を使って前節の予想を言い換えると，次のようになります．

予想：f の積分関数は f の原始関数？

この予想が実際に正しいことを，いよいよ次の節で証明します．

1.4 微分積分学の基本定理

定理 *1* *(*微分積分学の基本定理*)* 関数 f の積分関数 $G(x)$ は，f の原始関数の一つである．[言い換え：f の積分関数 $G(x)$ を微分すると元に戻る．]

（ただし，f は連続とする．）

（講義では図も描いて説明）連続というのは大分前にやったので忘れてしまったかもしれませんが，簡単に言うと，グラフが繋がっているという意味です．よりきちんと言うと，x をある点 a に近づけていったとき，$f(x)$ がちゃんと点 a における関数値 $f(a)$ に近づいていくという意味です．

連続がどうこうという話は，最初のうちはあまり気にしなくても結構です．要するに上の定理は，f の積分関数を微分すると元に戻ると言っているわけです．

この定理は微分と積分という，関数の性質を捉える上で重要な 2 つの操作の関係を明快に述べています．正しく「基本定理」と呼ぶにふさわしい内容と言えるでしょう．今からこの定理を，簡易的に証明します．ちゃんとした証明は次の節で与えますが，今からやる方が定理の直観的意味が掴みやすいです．

証明（簡易バージョン）　積分関数の定義から，

$$G(x) = \int_a^x f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.13}$$

です．

これを微分して $f(x)$ に戻ることを示せばいいので，$G(x)$ の微分係数を求めます．微分係数の定義から，

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \tag{1.14}$$

です．ここで，式 (1.14) 右辺の分子：

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(x')\mathrm{d}x' - \int_a^x f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.15}$$

について考えます．*1.1* 節で学んだように，定積分は積分関数の差で求められます（式 (1.8) 参照）ので，逆に言えば，積分関数の差は定積分になります．すなわち，公式 (1.8) で $c = x + h,\ b = x$ とおけば，

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.16}$$

が得られます（これは公式を忘れていても，図を描けばすぐに納得できます）．

ここから少し直観に頼った議論になりますが，式 (1.16) の右辺について考えます．我々は最終的にこの計算結果を式 (1.14) に戻し，$h \to 0$ の極限を計算したいので，h が非常に小さいと思って[4]式 (1.16) を見てみます．

すると，h が非常に小さいということは，式 (1.16) の積分範囲が非常に狭いということですから，積分範囲内で $f(x')$ の値はそれほど変動しないと考えてよいはずです．そこで積分範囲内の全ての $f(x')$ を，左端 x での値 $f(x)$ で代表して置き換え，

$$G(x+h) - G(x) \simeq \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x' \tag{1.17}$$

[4] h は正とは限らないので，正確には $|h|$ が非常に小さいと思って．

としてもそれほど悪くないと考えます[5]（これまでも用いてきましたが，$\simeq$ は「大体イコール」という意味です）．h が 0 に近づけば近づくほどこの「大体イコール」は正確な「イコール」に近づいていき，最後に式 (1.14) に代入して $h \to 0$ の極限をとったときには完全なイコールになるわけです．

今度は積分の中身が，積分変数 x' に関係のない「定数」となってしまったことに注意してください．グラフで言うと，x と $x+h$ の間における $f(x')$ の曲線を，高さ $f(x)$ の横棒で置き換えてしまったわけです．つまり式 (1.17) 右辺の積分は，単に高さ $f(x)$, 幅 h の長方形の面積[6]を表してるに過ぎないので，

$$G(x+h) - G(x) \simeq f(x)h \tag{1.18}$$

となります．これを式 (1.14) 右辺の分子に戻せば，先ほども述べたように $h \to 0$ の極限がとられるので「大体イコール」のことは気にする必要がなくなり，正確な式として

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x) \tag{1.19}$$

が得られます．これにて，f の積分関数 $G(x)$ を微分すると元の $f(x)$ に戻ること，すなわち G が f の原始関数（の一つ）であることが示されました．□

1.5 節では，気になる人のために厳密な証明をします（講義ではやりません）．またその次の *2.1* 節では，この定理を使って定積分の計算をする方法を学びます．

1.5 【発展】微分積分学の基本定理の厳密な証明

1.4 節で簡易的に証明した，微分積分学の基本定理を厳密に証明します．気になる人だけ読んでください．早く先へ進みたい人は飛ばしても結構です．

準備　基本定理の証明に入る前に，次の事実を証明しておきます[7]．

補題 *1* 区間 $[a, b]$ で常に $g(x) \le h(x)$ が成り立つとき，これらの定積分についても

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \tag{1.20}$$

が成り立つ．

[5] この辺があまり厳密でないところであり,「簡易バージョン」である所為です．この辺が気に入らないという人は，次の節参照．

[6] $h < 0$ の場合には，その面積にマイナスを付けたもの．

[7] **補題**とは，何かの定理を証明するための「踏み台」となる定理のことです．

<u>補題 *1* の証明</u>

仮定より，$h(x) - g(x) \geq 0$ です．

ところで積分というのは，大雑把に言えば区間全体に渡って関数の値を足したものなので，常に 0 以上の関数を積分してもやはり 0 以上です（これは積分の定義に返ってみればすぐに証明できます）．よって

$$\int_a^b [h(x) - g(x)]\mathrm{d}x \geq 0 \tag{1.21}$$

が成立します．

ここで「*3.3.2* 定積分の基本的な性質」で学んだ定積分の性質を使えば，式 (1.21) は

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq 0 \tag{1.22}$$

と変形できます．よって

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

これはまさに証明したかった式 (1.20) そのものであるので，これにて補題は証明されました．□

また，以下の証明では上の補題に加え，「*1.3* 節　極限の性質」で解説した**挟み撃ちの定理**を使います．簡単に復習しておくと，これはある区間で常に

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{1.24}$$

が成り立ち，かつ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \alpha \tag{1.25}$$

ならば

$$\lim_{x \to a} g(x) = \alpha \tag{1.26}$$

が成り立つという定理です．

直観的に言えば，$g(x)$ は上下から $f(x)$ と $h(x)$ という「壁」に挟まれているわけですが，x が a に近づくにつれてどちらの「壁」も同じ α という値に近づいていくので，それらの間で「挟み撃ち」にされた $g(x)$ も必然的に α に近づかざるを得ない（それ以外に行き場がない！）という理屈です．忘れてしまった人は，動画を見て思い出しておいてください．

微分積分学の基本定理の証明（フルバージョン）　いよいよ，本題に入ります．

途中までの流れは *1.4* 節の「簡易バージョン」と同じなので，同じ部分は省略します．

今，一旦 $h>0$ の場合について考えます．*1.4* 節の式 (1.16) より，

$$\lim_{h\to+0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to+0}\Big[\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x')\mathrm{d}x'\Big] \tag{1.27}$$

を得ます．$h>0$ なので lim も右側極限になっていることに注意してください．*1.4* 節ではここで，右辺の積分の中の $f(x')$ を $f(x)$ で置き換えてしまったわけですが，以下ではもう少し慎重な方法をとります．

まず，区間 $[x,x+h]$ における $f(x')$ の最大値を $M(x,h)$, 最小値を $m(x,h)$ とします[8]．h を動かすと，もちろん $M(x,h),m(x,h)$ も変化します．

すると最大・最小の定義から，積分区間 $[x,x+h]$ において常に

$$m(x,h)\le f(x')\le M(x,h) \tag{1.28}$$

が成り立ちます．さらに，上の補題 *1* から，式 (1.28) を x' で x から $x+h$ まで積分しても良く，

$$\int_x^{x+h}m(x,h)\mathrm{d}x'\le\int_x^{x+h}f(x')\mathrm{d}x'\le\int_x^{x+h}M(x,h)\mathrm{d}x' \tag{1.29}$$

が得られます．ここからただちに

$$m(x,h)h\le\int_x^{x+h}f(x')\mathrm{d}x'\le M(x,h)h, \tag{1.30}$$

すなわち

$$m(x,h)\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x')\mathrm{d}x'\le M(x,h) \tag{1.31}$$

となります．

ここで h を 0 に近づけたとき，$m(x,h),M(x,h)$ がどうなるか考えます．このとき重要な鍵となるのが，関数 f が連続であるという仮定です．この仮定により，

$$\lim_{x'\to x}f(x')=f(x) \tag{1.32}$$

が成立します．この式の意味は，「x' を必要に応じて x に十分近づければ，$f(x')$ を $f(x)$ に好きなだけ近づけることができる」です[9]（図 *2* 参照）．

実は，これは同時に

$$\lim_{h\to0}M(x,h)=\lim_{h\to0}m(x,h)=f(x) \tag{1.33}$$

をも意味します．何故なら $M(x,h)$ は区間 $[x,x+h]$ のどこか（x' とします）で関数 f がとる値なので，h が 0 に近づけば否応無しにその x' も x に近づかざ

[8]【高度な註】関数の最大値・最小値が存在するというのはそれほど当たり前のことではありませんが，この場合は区間 $[x,x+h]$ が閉区間（端を含む区間のこと）であることと，関数 $f(x')$ が連続であるという仮定によってちゃんと最大値・最小値の存在が保障されます．

[9]より詳しく言えば，「$f(x)$ を中心として，好きな縦幅の水平な帯を描いて下さい．その帯の縦幅 2ε がどれだけ狭かろうとも，私が x を中心としたある十分狭い横幅 2δ の垂直な帯を描けば，私の描いた帯の中で $f(x')$ は常にあなたの描いた帯の縦幅に納まります」と言っているのです（図 2）．

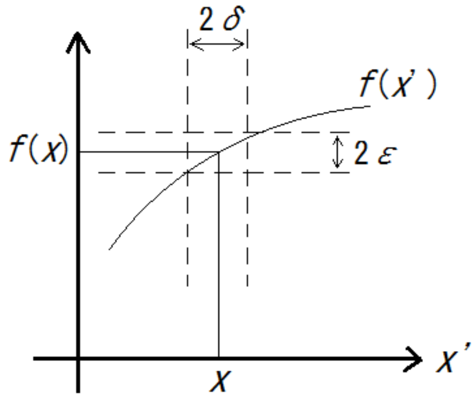

図 2: $f(x')$ の連続性を表す図．$f(x')$ を $f(x)$ に「どれだけ近づけたいか」を表すのが 2ε の縦幅であり，それに対して x' を x に「どれだけ近づければよいか」表すのが横幅 2δ．横幅 2δ 内の全ての x' に対して，$f(x')$ は 2ε の中に納まっている．

るを得ず，その結果 $M(x,h)$ は $f(x)$ に近づいていくことになります．$m(x,h)$ についても同様です[10]．

さて式 (1.33) より，式 (1.31) において $h \to +0$ とすれば，

$$\lim_{h\to+0}\left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x')\mathrm{d}x'\right] = f(x) \tag{1.34}$$

が得られます（挟み撃ちの定理:「*1.3*節　極限の性質」参照）．これを式 (1.27) に代入すれば，

$$\lim_{h\to+0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x) \tag{1.35}$$

となります．今は $h>0$ を仮定して話をしていたので，右側極限に関してしか示されていないことに注意しましょう．左側極限に関して示すには，$h<0$ の場合を考察しなければなりません．

$h<0$ の場合は，公式 (1.8) を

$$\int_{x+h}^{x} f(x')\mathrm{d}x' = G(x) - G(x+h) \tag{1.36}$$

[10]【より厳密な説明】図 2 の状況において，h を十分小さくすれば区間 $[x,x+h]$ はすっぽり横幅 2δ の中に納まってしまいます．このとき，区間 $[x,x+h]$ 内のあらゆる x' において $f(x')$ は縦幅 2ε の中に納まるわけで，それは $M(x,h), m(x,h)$ も例外ではありません．従って，h を必要に応じて十分小さくすれば，$M(x,h), m(x,h)$ を好きなだけ $f(x)$ に近づけられることが，言い換えれば式 (1.33) が言えたわけです．

という形で用います（$x+h<x$ に注意）．これにより，考えるべき極限は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to -0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} &= \lim_{h\to -0}\Big[-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(x')\mathrm{d}x'\Big] \\ &= \lim_{h\to -0}\Big[\frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} f(x')\mathrm{d}x'\Big] \end{aligned} \tag{1.37}$$

となります．

あとは上と同様の考え方から，式 (1.31) と類似の式

$$m(x,h) \le \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} f(x')\mathrm{d}x' \le M(x,h) \tag{1.38}$$

が出てきて，連続性と挟み撃ちの定理より

$$\lim_{h\to -0}\Big[\frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} f(x')\mathrm{d}x'\Big] = f(x) \tag{1.39}$$

が得られます．これを式 (1.37) に戻せば，

$$\lim_{h\to -0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x) \tag{1.40}$$

を得ます．

以上より，

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x). \tag{1.41}$$

すなわち G が f の原始関数であることが示され，定理は証明されました．□

2 定積分の計算

前節で証明した微分積分学の基本定理を使えば，微分法の公式を使って積分関数を計算する方法が得られます．それがこれから解説する，**微分積分学の基本公式**です．

2.1 微分積分学の基本公式

準備：原始関数の性質

[!] 原始関数と原始関数の差は定数である．

証明． F_1, F_2 をともに関数 f の原始関数とします．すなわち

$$F_1'(x) = f(x),\ F_2'(x) = f(x) \tag{2.1}$$

です．このとき $F_1(x) - F_2(x)$ が定数であることを証明すればよいのです．

そこで $F_1(x) - F_2(x)$ を x で微分すると，

$$\big[F_1(x) - F_2(x)\big]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0. \tag{2.2}$$

よって，$F_1(x) - F_2(x)$ の微分係数は常に 0 です．

ところで，微分係数とは関数の局所的な変化率でしたから，それが常に 0 であるということは元の関数が定数であるということに他なりません．よって $F_1(x) - F_2(x)$ は定数です．以上より，上の [!] で述べた性質が証明されました．□

さて，前節で学んだ微分積分学の基本定理と上の性質を合わせると，積分を計算する上で最も重要な公式が導かれます．その名も**微分積分学の基本公式**です．微分積分学の基本<u>定理</u>と混同しないよう注意してください．

公式 1 (微分積分学の基本公式) F を f の原始関数とするとき，次が成り立つ[11]．

1. f の積分関数を G と書くならば，$G(x)$ と $F(x)$ の差は定数である．
2. $f(x)$ の定積分は原始関数 $F(x)$ の差で次のように計算できる：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

（ただし f は連続とする．）

[11] 通常「微分積分学の基本公式」と呼ばれるのは式 (2.3) だけですが，1 もそれに近い意味を持っており，また式 (2.3) と同じぐらい重要なので，セットで「公式」としておきました．

証明． [*1*] *1.4* 節で証明した微分積分学の基本定理により，連続関数 f の積分関数 G は，f の原始関数でもあります．すると，F と G はどちらも f の原始関数となりますから，上の「準備」で述べた原始関数の性質により，これらの差は定数です．これにて上の *1* が証明されました．

[*2*] *1.1* 節で説明したように，定積分は積分関数の差で計算できるので，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a) \tag{2.4}$$

と書けます（式 (1.8) 参照）．ところで，すぐ上で証明したように $F(x)$ と $G(x)$ の差は定数なので，$G(x) - F(x)$ を C と書くことにします．すると

$$G(x) = F(x) + C \tag{2.5}$$

となります．この関係 (2.5) を式 (2.4) に代入すれば

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{2.6}$$

を得ますが，これはまさしく証明したかった式 (2.3) に他なりません．これにて *2* が証明されました．□

ここで少し，上の「公式」の意味を確認しておきましょう．

1 は，我々が f の原始関数の一つ F を知っているとき，それと f の積分関数 G の関係を述べているものです．通常，積分関数を直接的な計算で求めるのは難しい場合が多いですが，原始関数は微分法の公式を逆に使うことで容易に求まることがよくあります（*2.2* 節参照）．そういった場合に，上の *1* を使えば，f の積分関数を "（既に知っている）原始関数 + 定数 " の形で（式 (2.5) のように）表すことができるわけです．

こうして見ると，元々の定義は違えど，原始関数と積分関数は実際ほとんど同じものであることが分かります．実際式 (2.3) を見ると，これはもともと積分関数を使って定積分を計算する公式だった式 (2.4) で，積分関数を原始関数で置き換えただけのものです．つまり，少なくとも定積分を計算するという目的の下では，積分関数と原始関数を区別する意味はほとんどないのです[12]．高校数学で，f の原始関数を求めることを「積分する」と言ったり，原始関数のことを「不定積分」などと呼んでしまうのにはこういった事情があったわけですね．

[!] 原始関数 $\simeq$ 積分関数．

2 の役割も似たようなもので，こちらは定積分を求める際に使います．定積分を直接的に計算するのは一般に困難ですが，それがもし原始関数 F を一

[12]【細かい註】厳密に言うと，原始関数を使って計算する式 (2.3) は，元の関数 f が連続でないと使えません．一方積分関数を使う式 (2.4) の方は，f の連続性に関係なく使えます．

つ知っていれば，単なる引き算を計算するだけで定積分が求まると言っているのがこの公式です．定積分の定義の複雑さ（区間を細かく区切って，各小区間ごとの関数の値を足し合わせて，最後に区切りを無限に細かくしていく極限をとって……ああ面倒臭い！）を考えると，こんな単純な方法で定積分が計算できてしまうというのは驚くべき事実です．

歴史を振り返ってみると，積分法の考え方は実質的に紀元前から使われていたのに対して，微分法の概念が確立されたのは *17* 世紀になってからです．微分法の出現は，従来より圧倒的に効率のよい定積分の計算法をもたらしたという意味でも大革命だったわけですね．

それでは次の *2.2* 節で，実際に積分を計算する方法を例題を通して学んでいきます．

2.2　例題：べき関数の積分法

べき関数というのは，

$$f(x) = x^n \tag{2.7}$$

のような格好で定義される関数のことです（n は自然数とします）．以下ではべき関数の積分を考えます．

[例題]

1. x^n の不定積分 $\int x^n \mathrm{d}x$ を求めよ．

2. 次の定積分を計算せよ:

$$\int_1^3 x^2 \mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

解． [*1*] 微分積分学の基本公式（*2.1* 節）より，不定積分（積分関数）は”原始関数 + 定数”で表せるので，x^n の原始関数を求めればよいです．

するとこれは以前，*1.3* 節で例として計算したことがありますね．x^n の原始関数（の一つ）は

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{2.9}$$

でした．式 (2.9) が出てくる過程としては，まず微分して x^n になるためには x の肩が $n+1$ でなくてはならない．そこで x^{n+1} と書いてみると，これは微分したとき前に $n+1$ が出てきてしまうので，これが消えるためには予め $n+1$ で割っておかなければならない．その結果式 (2.9) になるわけです．

しかし，ここで非常に重要な注意があります．試験などで「不定積分を求めよ」と問われたときには，**出てきた答えに必ず"$+C$"を付け足して答案用紙に書かなければなりません**（C は定数のつもり）．つまりこの問題では，

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{2.10}$$

が模範解答です．

何故なら，不定積分とは本来積分関数のことなので，原始関数との差はゼロではなく，ある定数の分だけずれている可能性があるからです[13]．ただしその定数の値そのものは重要でないので，適当に"$+C$"などと書いておくのです．

[*2*] これも微分積分学の基本公式より，定積分は原始関数の差で求められるので，これを使います．まず，x^2 の原始関数は式 (2.9) で $n = 2$ として，

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \tag{2.11}$$

です．よって，

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 \mathrm{d}x &= F(3) - F(1) \\ &= 9 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned} \tag{2.12}$$

となります．

このように，微分法の公式を逆に使うことで，原始関数が簡単に求まることがあります．すると，*2.1* 節で勉強した微分積分の基本公式を使って定積分が簡単に計算できてしまうのです．これが，標準的な積分の計算法です．

次の節から，より具体的な問題での応用を見ていきます．

2.3　補足：便利な記号

まとめに入る前に，次のような記号を定義します[14]：

$$\Big[f(x)\Big]_a^b := f(b) - f(a). \tag{2.13}$$

[13]高校数学的に言うと，"不定積分"は原始関数のことです．しかし原始関数に定数を足したものも原始関数なので，"$+C$"を書かないと，「A 君と B 君はどちらも正しく"不定積分"を求めたのに，答えが定数だけずれている」などということが起こり得ます．従ってやはり"$+C$"が必要になるのです．

[14]$A := B$ というのは，「新しい記号 A を式 B により定義する」という意味です．

言葉で言うと，これは「a から b まで行ったときの $f(x)$ のの変化」を表す記号で，定積分の計算などでよく使います．例えば，

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 \\ &= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{26}{3} \qquad (2.14)\end{aligned}$$

のような具合です．

2.4　微分と積分の関係まとめ

この節ではこれまでのお話を振り返って，微分と積分の関係についてまとめてみたいと思います．

まずは復習から始めましょう．この章の出発点となった微分積分学の基本定理を思い出しておきます．

[復習：微分積分学の基本定理]　関数 f の積分関数 $G(x)$ は，f の原始関数の一つである．[言い換え：f の積分関数 $G(x)$ を微分すると元に戻る．]

（ただし，関数 f は連続とする．）

これは，ある関数 f を積分して微分すると元に戻ると言っている定理であり，微分と積分の関係を打ち立てる最も基本的な定理でした．

では，f を微分して積分しても元に戻るのでしょうか？答えは，微分積分学の基本公式が教えてくれています．

[復習：微分積分学の基本公式]　F を f の原始関数とするとき，次が成り立つ．

1. f の積分関数（＝不定積分）$\int f(x)\mathrm{d}x$ と $F(x)$ の差は定数である．
2. $f(x)$ の定積分は次のように計算できる：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b. \qquad (2.15)$$

（ただし，関数 f は連続とする．）

これは，積分を計算するための公式でした．しかし見方を変えると，これは関数 f と，その原始関数 F に関して成り立つ関係とも見られます．

ここで，ある関数 f と，その導関数 f' について考えましょう．f は f' の原始関数なので，上の関係（微分積分学の基本公式）を f' と f にあてはめて

もいいですね．つまり，微分積分学の基本公式で f のところに f'，F のところに f を入れるのです．少しややこしいですが，心を無にして素直にあてはめると，次のようになります．

定理 *2 (微分積分学の基本定理 II)* 関数 f について，

(i) 導関数 $f'(x)$ の積分関数（＝不定積分）と，$f(x)$ の差は定数である：

$$f(x) - \int f'(x)\mathrm{d}x = C. \tag{2.16}$$

$(ii) f'(x)$ の定積分は，$f(x)$ の差になる：

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)\Big]_a^b. \tag{2.17}$$

（f は微分可能とする．）

これが，微分と積分の関係を打ち立てるもう一つの「基本定理」です（便宜上,「微分積分学の基本定理 II」としておきます[15]）．

(i) は，関数 f を微分して積分したものは，元の f と定数の差しかないと言っています．また (ii) は，f を微分したものをある区間で定積分すると，その区間の端から端までで $f(x)$ がどれだけ変化したかが出る，と主張しています．

イメージ　この定理は，次のように考えると直観的に理解することができます（以前，速度の積分が位置の変化になることを説明したときと同じ考え方です）．

先に (ii) の方から説明します．これは，導関数というのは関数の「局所的な変化」の情報を取り出したものなので，それを区間全体で積分（合計）すれば全体での変化が復元できる，と読むことができます．

また，(i) は (ii) を使って説明できます．不定積分 $\int f'(x)\mathrm{d}x$ は，元はといえば積分関数 $\int_a^x f'(x')\mathrm{d}x'$ を略記したものなので，(ii) によるとこれは「出発点 a から x までの f の変化」を表します．これに「出発点」での関数値 $f(a)$ を足せば $f(x)$ そのものになりますが，$f(a)$ は定数なので，結局 $f'(x)$ の不定積分と $f(x)$ の差は定数になります．

コメント．　これが微分積分学の基本定理（無印）と違うのは，行って戻ってきたときに元の関数と定数の差が出てきてしまうところです．

積分してから微分した場合は，きっちりと元の関数に戻ります．しかし微分してから積分したときは，完全に元に戻るわけではなく，元の関数と定数だけずれてしまうのです．

[15] 普通は，僕の授業での「微分積分学の基本定理」と「微分積分学の基本定理 II」を合わせて「微分積分学の基本定理」と呼びます．

このずれの原因は何でしょうか．それは先ほどの「イメージ」から説明できます．

先ほど述べたように，導関数というのは関数の「局所的な変化」の情報を取り出したものです．故に，導関数が持っているのはあくまで**関数の変化に関する情報だけであって，関数の「値そのもの」の情報は持っていません．**

よって，導関数を積分することで再現できるのもやはり「変化の情報」のみです．出発点 a から x までで $f(x)$ がどれだけ変化したかは分かっても，出発点での値 $f(a)$ $(=$ 定数 $C)$ の情報は微分した時点で失われているので，積分しても戻らないのです．

つまり C は，$f(x)$ を微分した際に失われた部分を表していたのですね．

3 応用例

3.1 円錐の体積

3 章の終わりの方（*3.4.1* 節）で，我々は回転体の体積の公式を導き出しました．今回は，その公式を使って具体的な図形の体積を計算してみましょう．

まず，回転体の体積の公式を少し復習します（余裕で覚えている人は読み飛ばしてください）．

復習：回転体の体積　回転体とは，平面図形をある軸まわりに回転させた軌跡として表される立体図形のことでした．特に，半径（ここでは回転軸の各点から図形の表面までの距離のこと）がある関数 f を使って $r = f(x)$ のように表される回転体の体積は，公式

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{3.1}$$

で計算できます（a, b は回転体の右端と左端を表します）．

式 (3.1) の直観的意味は，次の通りです．回転体を非常に薄くスライスして，スライスした一枚一枚はほぼ円柱だと思うことにすると，その一枚一枚の体積は

$$\pi[f(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

で表されます（ただし，$\mathrm{d}x$ はスライスの厚さ）．円柱の底面積がスライスの断面積 $\pi[f(x)]^2$，高さが厚さ $\mathrm{d}x$ になるので式 (3.2) のようになるわけです．

このスライスの体積を，回転体の左端（a）から右端（b）まで足し算すると式 (3.1) になるわけです．積分記号 $\int$ の意味が，簡単に言えば「左端から右端までダーっと足す *(Sum)*」ことだということを思い出せば，これを直観的に理解することはそれほど難しくないはずです．

以前授業で言ったとおり，積分法を使って図形の面積や体積を計算するには，図形をいかに**関数を使って表す**かが重要になってきます．

円錐の体積　さて，復習が終わったところで本題に入ります．公式 (3.1) を使って，円錐の体積を計算してみましょう．

円錐とは，底が円形で，横から見ると三角形になるように先が尖った立体図形のことです．よく道路に置いてある赤い三角コーン[16]を思い浮かべてもらえばよいと思います．

三角定規を机の上でくるりと回転させてみれば分かる通り，円錐は回転体の一種です．より抽象的に言うならば，座標平面上で原点を通る直線を途中で切って，横軸（x 軸）まわりに回転させたものが円錐だと言えます（図 *3*）．

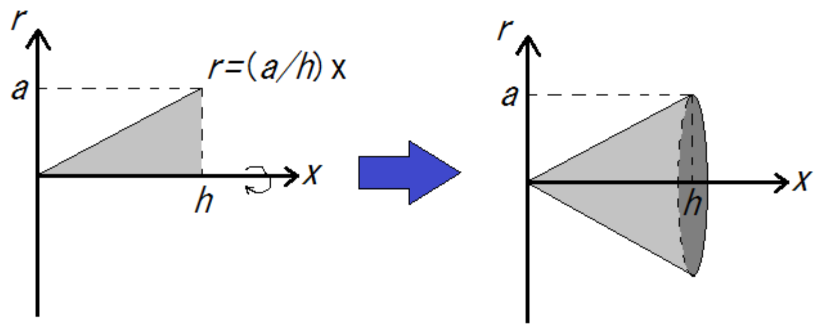

図 3: 円錐を回転体として表現した図です．図の左側のように，原点を通る傾き a/h の直線を x 軸まわりに回転させると，右側のように高さ h，底面の半径 a の円錐ができます．

底面の半径 a，高さ h の円錐を考えましょう．これは図 *3* のように，原点を通る傾き a/h の直線を回転させたものとして表せます．従って，半径は

$$r = \frac{a}{h}x \tag{3.3}$$

という関数で表されます．公式 (3.1) で言うところの $f(x)$ がこの $\frac{a}{h}x$ にあたるわけです．

ここまで分かれば，後は何も考えず公式に代入して計算するだけです．公

[16]余談ですが，そもそも「コーン (cone)」は英語で「円錐」という意味です．お菓子に「とんがりコーン」というのがありますが，あれはトウモロコシの”corn”と円錐の”cone”を掛けているわけですね．

式 (3.1) に

$$f(x) = \frac{a}{h}x,$$
$$a = 0,\ b = h$$

を代入すると，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left(\frac{a}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h x^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.4}$$

となります．

ここで，右辺の定積分を計算しましょう．x^2 の原始関数は *2.2* 節より

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \tag{3.5}$$

なので，(3.4) 右辺の定積分は

$$\int_0^h x^2 \mathrm{d}x = F(h) - F(0) = \frac{h^3}{3}. \tag{3.6}$$

この結果を式 (3.4) に戻せば，

$$V = \frac{\pi a^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3} \tag{3.7}$$

となります．

式 (3.7) の分子は，高さ h，底面の半径 a の円柱の体積を表します．こうして，中学で習った「円錐の体積は円柱の 1/3」という事実がちゃんと証明されたわけです．

この例のように，積分法は図形の面積や体積を求める上で非常に強力な手法です．次の節では続けて，球の体積を求めてみましょう．

3.2　球の体積

ここでは前節の円錐に続く形で，球の体積を求めてみます．

球も，やはり回転体です．実際，図 *4* のような半月形の図形を回転させれば球ができます．問題は，この形をどうやって関数で表現するか（どうやって図の $f(x)$ を求めるか）です．

軸の各点から表面までの距離 r を x の関数として求めれば，それが $f(x)$ です．ここで，r は球を x 軸に垂直な面で切った円形断面の半径であって，**球の半径ではない**ことに注意しましょう．図 *4* をよく見れば分かるとおり，球の半径は定数 a ですが，r は位置 x の関数です．

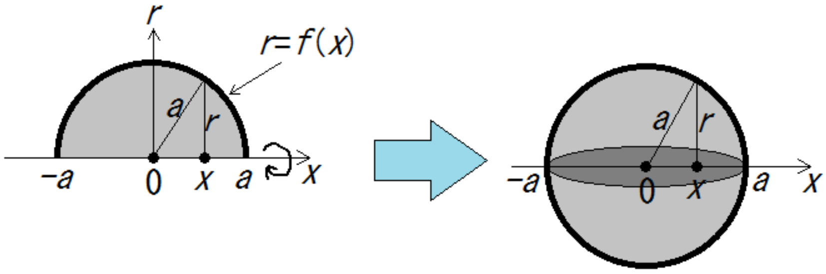

図 4: 半径 a の球を回転体として表現した図です．便宜上，球の中心にあたる部分を $x = 0$ としています．図の r を x の関数として表すことが，我々の目標となります．

さて，実際に r を x の関数として求めるのは，さほど難しい作業ではありません．図 4（左側でも右側でもかまいません）の，球の半径を斜辺とする直角三角形に注目します．底辺の長さは，原点から x までの距離なので $|x|$ です．また斜辺が球の半径 a で，残る一辺が r ですね．従って三平方の定理から，

$$r^2 = a^2 - x^2 \tag{3.8}$$

となります．通常ならこれを $r =$ の式に直すところですが，ここではその必要はありません．何故なら，回転体の体積の公式 (3.1) には，$\{f(x)\}^2$ の形しか出てこないからです．従って $f(x)$ をわざわざ求めなくても，

$$\{f(x)\}^2 = a^2 - x^2 \tag{3.9}$$

をそのまま式 (3.1) に代入すればよく，

$$V = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\mathrm{d}x \tag{3.10}$$

となります（積分範囲を $[-a, a]$ とするのを忘れないように！）．あとは単に積分を計算すればよく，定積分の基本的な性質などを使うと

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-a}^{a} a^2\mathrm{d}x - \pi \int_{-a}^{a} x^2\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.11}$$

のように計算できます．

第一項の $\int_{-a}^{a} a^2 \mathrm{d}x$ は，定数の積分なので長方形の面積で，$a^2 \times 2a = 2a^3$ となります．一方第二項は，x^2 の原始関数が $x^3/3$（*2.2* 節参照）なので

$$\int_{-a}^{a} x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3} = \frac{2a^3}{3}. \tag{3.12}$$

これらの結果を式 (3.11) に戻せば，

$$V = 2\pi a^3 - \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}. \tag{3.13}$$

これにて球の体積の公式が出ました．ちなみにこの式の覚え方は，半径 a を r に変えて，「身 (3) の上に心配 (4π) あーる (r) の *3* 乗」（$= 4\pi r^3/3$）です．

3.3 球の表面積

ここでは，球の表面積を求めてみましょう．実は，回転体には表面積を求める一般的な公式があります．それを使っても求められるのですが，今回は少し特殊な方法を紹介します．

このやり方は少し発想が突飛なので，先に答えをカンニングしておきましょう．半径 r の球の表面積 S は，

$$S = 4\pi r^2 \tag{3.14}$$

となります．この形，どこかで見たような気がしませんでしょうか．球の体積の公式

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \tag{3.15}$$

と比べてみると，何ともよく似ているではありませんか．しかもさらに観察すると，これらは不思議な関係で結ばれていることにも気づきます．すなわち，表面積 S の式は体積 V を r で微分したものになっているのです：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)' = 4\pi r^2 = S. \tag{3.16}$$

これは何とも神秘的な関係です．この関係を論理的に導き出すことができれば，すぐに球の表面積の公式 (3.14) が証明できます．

そこで，次のような戦略で行きます．表面積が体積の微分係数になることが分かっているのだから，半径 r を少しだけ変化させた際に，体積 V がどのように変化するかを考察します．微分係数は変化率なので，その考察の途中で表面積 S が出てくれば，S と $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ を関係付けることができるはずです．

今，球の半径 r がほんの少しの量 $\mathrm{d}r$ だけ変化して，$r + \mathrm{d}r$ になったとしましょう．このとき球の体積は，表面に厚さ $\mathrm{d}r$ の「薄皮」がくっついた分だけ増加します．

イメージが沸かない人は，半径 $r = 1cm$ のビー玉の表面を，粘土でコーティングするという状況を考えて下さい．表面を覆う粘土の厚さが $\mathrm{d}r = 0.1cm$ だったとすると，コーティングした後のビー玉の半径は $r + \mathrm{d}r = 1.1cm$ になっているはずですね．

話を戻すと，つまりこのとき表面にくっついた「薄皮」の体積が，球の体積の変化量 $\mathrm{d}V$ にあたるわけです．この「薄皮」の体積を求めるために，「薄皮」を剥がして平たくしましょう．もちろん，面積は変わらないように，そっとです．この「薄皮」はもともと球の表面をちょうど覆っていたのですから，その面積は球の表面積 S に等しいです．すると結局，この「薄皮」を平たく広げたものは，面積 S の領域が高さ $\mathrm{d}r$ だけ上に立ち上がった柱体（柱状に真っ直ぐ伸びた立体）になります．

柱体の体積は「底面積 × 高さ」[17]なので，「薄皮」の体積は直ちに，

$$\mathrm{d}V = S\mathrm{d}r \tag{3.17}$$

となります．あとはもう簡単です．V の r による微分係数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ は，記号の通り V の変化 $\mathrm{d}V$ を r の変化 $\mathrm{d}r$ で割ったものなので，

$$S = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \tag{3.18}$$

が出てきます．これに体積の公式 (3.15) を代入すれば，すぐに式 (3.14) が得られるというわけです．

コメント． これで，球の表面積の公式 (3.14) が導けました．最初に述べたとおり，ここで使った方法は特殊なものであり，他の回転体では使えません．

今回の「体積の式を微分すると表面積になる」という事実を拡大解釈して「三次元（の量）を微分すると二次元（の量）になる」とか，「二次元（の量）を積分すると三次元（の量）になる」といった理解の仕方をする人がいますが，これもあまり正確ではありません．今回，体積という三次元の量と，表面積という二次元の量の間に微分による対応がついたのは，球という図形の特殊性によるものです．やはり微分とはあくまで「関数の変化率」であり，積分とは「区間を細かく区切って関数値を足し合わせたもの」（または「グラフと横軸の間の面積」）と理解しておくのが安全です．

3.4 力学との関係まとめ

ここまで，微分積分の概念を身近な例で理解するため，物体の運動を扱う力学と対応させながら話をしてきました．ここでは，これまで解説してきた

[17] この公式も，小学校や中学校で何となく覚えさせられた人が多いと思います．しかしこれは，柱体をとても小さな立方体の集まりだと考えれば納得できます（積分と同じ発想）．気になる人は各自確かめてみてください．

力学の量についてまとめ，そこに微分と積分の関係がどのように現れているかを見てみましょう．

まず基本となるのが，物体の位置を表す量 x です．これを時刻 t の関数として，$x(t)$ と書くのでした．

また，各瞬間において，位置の時間に対する変化率を表すのが速度 $v(t)$ であり，これは $x(t)$ の導関数として定義されました．

さらに，速度が時間に対してどのような割合で変化しているのか（一秒間にどれだけ加速/減速しているのか）を表すのが加速度 $a(t)$ であり，具体的には速度の導関数として定義されるものでした．

今，位置 $\to$ 速度 $\to$ 加速度という向きで考えましたが，今度はこの矢印を逆に辿ってみましょう．速度が位置の導関数であるということは，位置は速度の原始関数であるということです（お母さんと子供の関係を思い出してください）．微分積分学の基本公式によると，原始関数と積分関数は（定数を除いて）ほぼ同じものでしたから，位置は速度の積分関数（+ 定数）であるとも言えます：

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' + x_0. \tag{3.19}$$

x_0 は今勝手に導入した定数ですが，上の式で $t \to t_0$ とすれば，右辺の積分は 0 に行くので $x_0 = x(t_0)$ であることが分かります．すなわち言い換えれば，

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' \tag{3.20}$$

です．要するに，速度を積分すると位置（の変化）になるわけです．

この関係はもちろん速度と加速度についても同じで，加速度を積分すると速度（の変化）になります：

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t')\mathrm{d}t'. \tag{3.21}$$

まとめると，図 5 のような関係になっているわけです．

力学の量同士が，微分と積分により見事に対応付けられていることに注目しましょう．

さらに力学では，物体に働く力 F と加速度 a が，ニュートンの運動方程式

$$F = ma \tag{3.22}$$

により関係付けられています．そこで，力 F が位置や速度とどのように関係しているかが分かれば，図 5 の関係を利用して $x(t)$ を，すなわち物体の運動を求めることができるわけです．

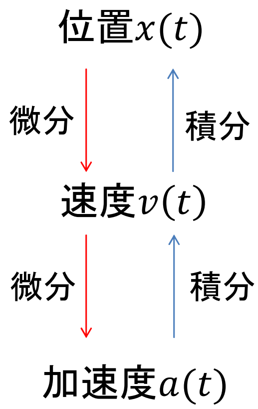

図 5: 位置，速度，加速度の関係

例：等加速度直線運動　例として，第 3 章で考察した等加速度直線運動，すなわち加速度が定数 a のときの運動を，もう一度扱ってみましょう．第 3 章ではまだ積分の計算ができなかったので，台形の面積を求めるという原始的な方法を使いましたが，今となってはより効率的な方法で等加速度直線運動の公式を導くことができます．

加速度が定数 a なので，式 (3.21) より

$$v(t) = v_0 + at \tag{3.23}$$

です．ただし $t_0 = 0$，$v_0 = v(0)$ としました．さらにこれを式 (3.20) に代入すれば，

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at')\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{3.24}$$

となります．これで終わりです．

どうでしょう．以前第 3 章でやったときの計算量に比べれば「一瞬」ですね．今回はこのように，加速度が分かればそれを積分して速度が，そしてさらに積分して位置が分かる，というように「とんとん拍子」で運動が求まってしまいました．普通ここまでスムーズに事が運ぶことはまれですが，いずれにせよ多くの問題では，加速度が分かれば図 5 の関係を利用して運動を求めることが出来ます．

力学において，位置と速度，加速度が微分と積分を通してこのように関係付けられているという事実は，物体の運動を求める上で最も基本的なことなのです．